

## 7. 2. CIĄG ARYTMETYCZNY

### Definicja ciągu arytmetycznego

Ciąg  $(a_n)$  jest **ciągami arytmetycznym**  $\Leftrightarrow$  dla każdego  $n \in N_+$  zachodzi  $a_{n+1} = a_n + r$ ,  
gdzie  $r \in R$

$r$  – stała **różnica** ciągu arytmetycznego

Przykład 7.2.1. Oblicz cztery początkowe wyrazy w ciągu arytmetycznym, wiedząc, że

a)  $a_1 = -3, r = 2$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = -3$ $a_2 = -3 + 2 = -1$ $a_3 = -1 + 2 = 1$ $a_4 = 1 + 2 = 3$  Odp. $-3, -1, 1, 3$	W ciągu arytmetycznym każdy wyraz, oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby $r$ , czyli $a_2 = a_1 + r$ $a_3 = a_2 + r$ $a_4 = a_3 + r$ $a_5 = a_4 + r \dots$

b)  $a_2 = 5, r = -3$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_2 = a_1 + r$ $5 = a_1 + (-3)$ $a_1 = 5 + 3 = 8$	Aby obliczyć pierwszy wyraz ciągu wykorzystujemy zależność $a_2 = a_1 + r$
$a_3 = 5 + (-3) = 2$ $a_4 = 2 + (-3) = -1$	Obliczmy trzeci i czwarty wyraz dodając do poprzedniego wyrazu liczbę $r$ .
Odp. $8, 5, 2, -1$	

Przykład 7.2.2. Zbadaj które z podanych ciągów są arytmetyczne:

a)  $a_n = 2 - 4n$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_{n+1} = a_n + r$ $r = a_{n+1} - a_n$	Aby wykazać, że ciąg jest arytmetyczny musimy udowodnić, że różnica $r$ jest liczbą stałą.
$a_n = 2 - 4n$	Zapisujemy $n$ -ty wyraz ciągu.
$a_{n+1} = 2 - 4(n+1) = -4n - 2$	Wyznaczamy wyraz następny.
$r = a_{n+1} - a_n = (-4n - 2) - (2 - 4n) = -4$ Odp. Ciąg $(a_n)$ jest arytmetyczny.	Badamy różnicę $r$ . Różnica $r$ jest liczbą stałą, zatem ciąg jest arytmetyczny.

b)  $b_n = 4n^2 + n$

Rozwiązanie	Komentarz
$b_n = 4n^2 + n$	Zapisujemy $n$ -ty wyraz ciągu.
$b_{n+1} = 4(n+1)^2 + (n+1) =$ $= 4(n^2 + 2n + 1) + (n+1) =$ $4n^2 + 9n + 5$	Wyznaczamy wyraz następny
$r = b_{n+1} - b_n = (4n^2 + 9n + 5) - (4n^2 + n) = 8n + 5$ <p>Odp. Ciąg <math>(b_n)</math> nie jest arytmetyczny.</p>	Badamy różnicę $r$ . Różnica $r$ nie jest stała, zatem ciąg nie jest arytmetyczny.

**Wzór ogólny ciągu arytmetycznego**  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Przykład 7.2.3. Napisz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:  $2, 1\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = 2$ $r = a_2 - a_1 = 1\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$	Wypisujemy $a_1$ i obliczamy $r$ wiedząc, że $a_2 = a_1 + r$
$a_n = 2 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$ $a_n = -\frac{1}{2}n + 2\frac{1}{2}$	Aby zapisać wzór ogólny danego ciągu wykorzystujemy wzór $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Przykład 7.2.4. Wyznacz setny wyraz ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1 = 3$  i  $r = 5$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_{100} = a_1 + (100-1) \cdot r$ $a_{100} = 3 + (100-1) \cdot 5 = 498$ <p>Odp. Setny wyraz ciągu jest równy 498.</p>	Wykorzystujemy wzór $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

**Przykład 7.2.5.** Wyznacz pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego, wiedząc, że  $b_7 = -8, b_2 = 2$ .

Rozwiązanie	Komentarz
$b_7 = b_1 + (7-1) \cdot r$ $b_2 = b_1 + (2-1) \cdot r$ $\begin{cases} -8 = b_1 + 6r \\ 2 = b_1 + r \end{cases}$	Wykorzystujemy wzór $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ i zapisujemy układ równań z niewiadomymi $b_1$ i $r$
$\begin{cases} -8 = b_1 + 6r \\ 2 = b_1 + r \cdot (-1) \end{cases}$ $\begin{cases} -8 = b_1 + 6r \\ -2 = -b_1 - r \end{cases}$ $\begin{array}{r} \text{-----} + \\ -10 = 5r \quad / : 5 \\ r = -2 \end{array}$ $b_1 + r = 2$ $b_1 - 2 = 2$ $b_1 = 4$ <p>Odp. <math>b_1 = 4, r = -2</math></p>	Obliczmy pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego rozwiązując układ równań

**Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego**

Jeżeli  $a, b, c$  są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to zachodzi

$$2b = a + c$$

**Przykład 7.2.6.** Wyznacz wartość  $x$ , tak aby liczby  $2x + 3, x - 1, 3x + 4$  w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 2x + 3$ $b = x - 1$ $c = 3x + 4$ $2b = a + c$ $2(x-1) = (2x+3) + (3x+4)$	Wykorzystujemy wzór $2b = a + c$ i zapisujemy równanie z niewiadomą $x$ .
$2(x-1) = (2x+3) + (3x+4)$ $2x - 2 = 2x + 3 + 3x + 4$ $2x - 2x - 3x = 3 + 4 + 2$ $-3x = 9 \quad / : (-3)$ $x = -3$	Rozwiązujemy równanie i obliczamy $x$ .

### Suma częściowa ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{lub} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Przykład 7.2.7. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1 = 5, r = 2$ .

Rozwiązanie	Komentarz
<p><b>1 sposób:</b></p> $a_1 = 5$ $a_2 = 5 + 2 = 7$ $a_3 = 7 + 2 = 9$ $a_4 = 9 + 2 = 11$ $a_5 = 11 + 2 = 13$ $a_6 = 13 + 2 = 15$	<p>Wypisujemy sześć kolejnych wyrazów ciągu i je dodajemy.</p>
$S_6 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 60$	
<p><b>2 sposób:</b></p> $S_6 = \frac{2 \cdot 5 + (6-1) \cdot 2}{2} \cdot 6$ $S_6 = \frac{10 + 10}{2} \cdot 6$ $S_6 = 60$	<p>Wykorzystujemy wzór</p> $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

Przykład 7.2.8. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą ciągu arytmetycznego:  $5 + 7 + 9 + \dots + x = 96$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = 5$ $r = 2$ $a_n = x$ $S_n = 96$	<p>Wypisujemy dane.</p>
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$ $96 = \frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$ $96 = \frac{10 + 2n - 2}{2} \cdot n$ $96 = \frac{2n + 8}{2} \cdot n$	<p>Wykorzystując wzór <math>S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n</math>, układamy równanie z niewiadomą <math>n</math>.</p>

$96 = n^2 + 4n$ $-n^2 - 4n + 96 = 0$ $a = -1, b = -4, c = 96$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 96 = 16 + 384 = 400$ $n_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{400}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 - 20}{-2} = 8$ $n_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{400}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 + 20}{-2} = -12 \notin N_+$ $n = 8$	<p>Rozwiązując równanie kwadratowe wykorzystujemy wzory: <math>\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c</math></p> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$ <p>Uwzględniając, że <math>n \in N_+</math>, otrzymujemy <math>n</math></p>
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ $x = 5 + (8-1) \cdot 2$ $x = 19$	<p>Wykorzystując wzór <math>a_n = a_1 + (n-1) \cdot r</math>, obliczamy <math>x</math></p>

**Przykład 7.2.9.** Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1.

Rozwiązanie	Komentarz
$1 : 5 = 0$ reszty 1 $6 : 5 = 1$ reszty 1 $11 : 5 = 2$ reszty 1 ..... $96 : 5 = 19$ reszty 1  $1 + 6 + 11 + \dots + 96 = S_n$	<p>Wypisujemy sumę liczb której szukamy.</p>
$a_1 = 1$ $r = 5$ $a_n = 96$	<p>Wypisujemy dane.</p>
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ $96 = 1 + (n-1) \cdot 5$ $96 = 1 + 5n - 5$ $-5n = -96 + 1 - 5$ $-5n = -100 / : (-5)$ $n = 20$	<p>Obliczamy <math>n</math> ( liczbę składników sumy <math>S_n</math>) korzystając ze wzoru:  <math>a_n = a_1 + (n-1) \cdot r</math></p>
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_{20} = \frac{1 + 96}{2} \cdot 20 = 97 \cdot 10 = 970$  <p>Odp. Suma liczb mniejszych od 100, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1 jest równa 970.</p>	<p>Obliczamy sumę <math>1 + 6 + 11 + \dots + 96 = S_n</math> korzystając ze wzoru <math>S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n</math></p>

Przykład 7.2.10. Pewien uczeń postanowił w ciągu 10 dni rozwiązać wszystkie zadania ze zbioru zadań. Zdecydował, że pierwszego dnia rozwiąże 6 zadań, a każdego następnego o 5 więcej niż dnia poprzedniego. Oblicz ile było zadań w zbiorze.

Rozwiązanie		Komentarz
Dane: $a_1 = 6$ $r = 5$ $n = 10$	Szukane: $S_n = ?$	Ilość zadań rozwiązywanych przez ucznia w kolejnych dniach tworzą ciąg arytmetyczny.  Szukana jest suma wszystkich zadań rozwiązanych przez ucznia w ciągu 10 dni.
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2 \cdot 6 + (10-1) \cdot 5}{2} \cdot 10 = \frac{12 + 45}{2} \cdot 10 = 57 \cdot 5 = 285$		Sumę $S_n$ obliczymy korzystając ze wzoru: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$
Odp. W zbiorze było 285 zadań.		

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 7.2.1. (2pkt.) Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , wiedząc, że  $a_2 = -4, a_3 = -8$ .

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie różnicy $r$ ciągu arytmetycznego $(a_n)$ .	1
2	Podanie pierwszego i czwartego wyrazu ciągu $(a_n)$ .	1

Ćwiczenie 7.2.2. (2pkt.) Udowodnij, że ciąg  $a_n = \frac{n+2}{3}$  jest ciągiem arytmetycznym.

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyrazu następnego $a_{n+1}$ .	1
2	Podanie różnicy $r = a_{n+1} - a_n$ i uzasadnienie, że ciąg jest arytmetyczny.	1

Ćwiczenie 7.2.3. (1pkt.) Sprawdź, czy liczby  $\sqrt{2} - 3, 1, 5 - \sqrt{2}$  tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi z uzasadnieniem.	1

Ćwiczenie 7.2.4. (3pkt.) Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  jest takim ciągiem, w którym  $a_1 = 3, r = -2$ . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Wyznacz:  $a_{14}, a_{5n}$ .

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wzoru ogólnego ciągu $(a_n)$ .	1
2	Podanie $a_{14}$ .	1
3	Podanie $a_{5n}$ .	1

Ćwiczenie 7.2.5. (3pkt.) Oblicz sumę:  $7 + 11 + 15 + \dots + 51$ .

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie różnicy ciągu arytmetycznego jaki tworzą składniki sumy.	1
2	Podanie liczby $n$ składników sumy.	1
3	Podanie sumy.	1

Ćwiczenie 7.2.6. (2pkt.) Wyznacz pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego, wiedząc, że  $a_5 = 10, S_7 = 210$ .

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie układu równań z niewiadomymi $a_1, r$ .	1
2	Podanie wartości $a_1, r$ .	1

Ćwiczenie 7.2.7. (2pkt.) Między liczby 4 i 108 wstaw trzy liczby  $x, y, z$ , tak aby liczby 4,  $x, y, z, 108$  tworzyły ciąg arytmetyczny.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Wyznaczenie różnicy $r$ ciągu arytmetycznego.	1
2	Podanie wartości $x, y, z$	1

Ćwiczenie 7.2.8. (2pkt.) Darek odkładał za stypendium pieniądze na wakacje.

W pierwszy miesiącu odłożył 30 zł, a w każdym następnym o 5 złotych więcej niż w poprzednim. Przez ile miesięcy oszczędzał, jeśli w sumie uzbierał 450 zł.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Wypisanie z zadania $a_1, r, S_n$ .	1
2	Podanie $n$ – liczby miesięcy ,w ciągu których Darek oszczędzał.	1